Výpočet Lebesgueova integrálu

Pro $f \in \mathcal{L}_d^*$ a $A \in \Lambda_d$ definujeme integrál z f přes množinu A jako

$$\int_A f = \int f \cdot \chi_A.$$

Obdobně můžeme tento integrál definovat pro každou funkci f, pro kterou platí $A \subseteq D_f$ (zde f nejprve rozšíříme nulou na $\mathbb{R}^e \setminus D_f$ a předpokádáme, že v $\mathcal{L}_d^*$ leží toto rozšíření). Množinu všech funkcí pro které je $\int_A f$ konečný značíme $\mathcal{L}(A)$, množinu všech funkcí, pro které je $\int_A f$ definovaný označíme $\mathcal{L}^*(A)$. Funkci f nazveme měřitelnou na A, pokud existuje $f \in \mathcal{M}_d$, že $f|_A = g|_A$.

Věta 1 (vztah Riemannova a Lebesgueova integrálu)**.** *Pokud $f \in \mathfrak{R}([a,b])$, potom $f \in \mathcal{L}([a,b])$ a platí*

$$\int_a^b f = (R)\int_a^b f.$$

Věta 2 (Fubini)**.** *Nechť $f \in \mathcal{L}_{d+m}^*$ pro $x \in \mathbb{R}^d$ a $y \in \mathbb{R}^m$ položme*

$$F(y) = \int f(\cdot, y) \quad a \quad G(x) = \int f(x, \cdot).$$

potom (po případném doredinování na nulové množině) $F \in \mathcal{L}_m^*$, $G \in \mathcal{L}_d^*$ a platí

$$\int f = \int F = \int G.$$

Věta 3 (o substituci)**.** *Nechť $U \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a $\varphi : U \to \mathbb{R}^d$ je regulární. Nechť navíc $A \subset \varphi(U)$ je měřitelná $f \in \mathcal{L}^*(A)$, potom pro platí*

$$\int_A f = \int_{\varphi^{-1}(A)} |J_\varphi| f \circ \varphi.$$